Soluciones del Parcial 1 **31-10-18**

Ejercicio 1 (1 punto)

Demuestra por inducción que para todo n∈**N**, 2^{2n} -1 es múltiplo de 3.

Solución:

Sigamos los pasos de una demostración por inducción:

Primer paso. Comprobamos que el resultado es cierto para n=1.

2^2 -1=3, que efectivamente es un múltiplo de 3.

Segundo paso. Suponiendo que el resultado es cierto para k, debemos probar que el resultado es cierto para k + 1

La hipótesis de inducción (HI) es que el resultado es cierto para k, es decir que , 2^{2k} -1 es múltiplo de 3.

Debemos probar que $2^{2(k+1)}$ -1 es múltiplo de 3. Operamos:

$$\mathbf{2^{2(k+1)} - 1 = 4\ 2^{2k} - 1 = (4\ 2^{2k} - 4) + (4 - 1) = 4\ \underbrace{(2^{2k} - 1)} + 3}$$

Múltiplo de 3 por HI

Por tanto, cada sumando es múltiplo de 3 y la expresión es múltiplo de 3 para k + 1

Así hemos conseguido demostrar que si el resultado es cierto para k, también lo es para k + 1.

Por el principio de inducción el resultado es cierto para todo n∈**N**

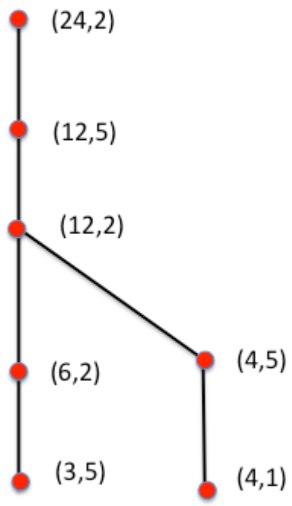
Ejercicio 2 (2 puntos)

Se considera el conjunto $(D_{48}, |) \times (D_{10}, \leq)$ ordenado con el orden lexicográfico y con el orden producto. Dado el subconjunto A = {(3,5), (4,1), (4,5), (6,2), (12,2), (12,5), (24,2)}, halla, si existen, los elementos maximales y minimales, cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo del subconjunto A, tanto para el orden lexicográfico como para el orden producto. Sugerencia: Dibuja los diagramas de Hasse de A respecto de ambos órdenes.

Solución:

Trabajamos independientemente los dos órdenes que se piden en el enunciado.

Orden lexicográfico en A



Primero dibujamos el diagrama de Hasse de (A, Lex)

Empecemos buscando minimales y maximales, que SÓLO debemos buscar dentro de A.

Elemento **maximal**: **(24,2)** porque no hay ningún elemento de A posterior a él.

Como hay solo un maximal, es el **máximo**.

Elementos **minimales**: **{(4,1), (3,5)}**, porque no hay ningún elemento de A anterior lexicográficamente a ninguno de ellos

Como hay más de un minimal **NO existe mínimo**.

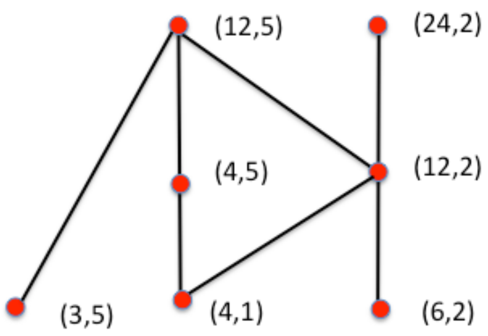
Ahora buscamos cotas superiores e inferiores de A. Hay que mirar en todo $(D_{48}, |) \times (D_{10}, \leq)$

Cotas superiores de A: **{(24,2), (24,5), (24,10)} ∪ {(48,k) / k∈ D_{10}}** Como **(24,2)** es anterior al resto de cotas, será el **supremo** de A. Además cuando existe máximo es también el supremo.

Cotas inferiores de A: **{(1,k) / k∈ D_{10}}**

Ínfimo de A es **(1,10)** porque es la mayor, en el orden lexicográfico, de las cotas inferiores

Orden producto en A



Primero dibujamos el diagrama de Hasse de (A, Prod)

Empecemos buscando minimales y maximales, que SÓLO debemos buscar dentro de A.

Elementos **maximales: (12,5) y (24,2)** porque no hay ningún elemento de A posterior a ellos. Además estos elementos no son comparables con el orden producto. Como hay más de un maximal **NO existe máximo**.

Elementos **minimales**: **{(4,1), (3,5), (6,2)}**, porque no hay ningún elemento de A anterior en el orden producto a ninguno de ellos. Como hay más de un minimal **NO existe mínimo**.

Ahora buscamos cotas superiores e inferiores de A. Hay que mirar en todo $(D_{48}, |) \times (D_{10}, \leq)$ **Cotas superiores** de A: (a,b) será cota superior si a es múltiplo de 12 y 24 y b es mayor que 2 y 5. Luego las cotas superiores son : **{(24,5), (24,10), (48,5), (48,10)}**. Como (24,5) es menor que las demás cotas, **(24,5)** es el supremo de A.
Cotas inferiores de A: (c,d) será cota inferior si c es divisor de 3, 6 y 4 y d es menor que 1, 2 y 5.
Luego solo hay una **cota inferior (1,1)** que es también **el ínfimo**.

Ejercicio 3 (1,5 punto)

Un grupo de amigos se gasta 120 euros comprando bebida y aperitivos salados para una merienda. Adquieren bebidas a 2,20 euros la unidad y bolsas de aperitivos a 8 euros la unidad. ¿Qué han comprado?

Solución:

Sean **x** el número de bebidas e **y** el número de bolsas de aperitivos que compran. Indiquemos las relaciones entre las incógnitas que se deducen del enunciado.
$x > 0$, $y > 0$,
$\mathbf{2{,}2x + 8\,y = 120}$ de donde $1{,}1x + 4\,y = 60$

Multiplicamos esta expresión por 10 para conseguir una ecuación diofántica (coeficientes enteros)

$$11x + 40y = 600 \qquad (*)$$

Resolvamos esta ecuación diofántica, que tiene solución porque $\text{mcd}(11,40) = 1$ que divide a 600

En primer lugar resolvemos la ecuación $11x + 40y = 1$
La solución es inmediata, $x = 11$, $y = -3$,
Por tanto, una solución particular de (*) es $x = 6600$, $y = -1800$,

Y todas las soluciones de (*) son:

$$\begin{cases} x = 6600 - 40t \\ y = -1800 + 11t \end{cases} \forall t \in Z$$

Falta ahora imponer las restricciones sobre x e y indicadas por el enunciado del ejercicio para determinar el valor (o valores) de t que responden a la pregunta del enunciado.
$x = 6600 - 40t > 0$, luego $40t < 6600$, es decir, $t < 165$
$y = -1800 + 11t > 0$, luego $11t > 1800$, es decir, $t > 163{,}6$ o sea, $t \geq 164$

Para $t = 164$ tenemos $x = 40$, $y = 4$ solución válida
Para $t = 165$ tenemos $x = 0$, $y = 15$ que no es válida porque en el enunciado se dice que compran bebidas.

Por tanto, la compra ha sido de 40 bebidas y 4 bolsas de aperitivos.

Ejercicio 4 (2 puntos)

Resuelve la ecuación:

$$2018^{2018}x \equiv 18 (\text{mod}\, 50)\,,$$

enunciando los resultados sobre congruencias que utilices en su resolución.

Solución:

Las congruencias son una herramienta para manejar números grandes. Apliquémosla:

Empezamos por 2018 (mod 50). Como $2018 \equiv 18 \pmod{50}$
Así simplificamos la ecuación original a

$$18^{2018}x \equiv 18 (\text{mod}\, 50) \quad (*)$$

Aplicamos ahora la propiedad cancelativa en congruencias

$$\text{Si} \quad ca \equiv cb (\bmod m) \text{ entonces} \qquad a \equiv b (\bmod \frac{m}{mcd(a,b)})$$

En nuestro caso c = 18, m = 50, mcd(18, 50) = 2, luego la ecuación se simplifica a

$$18^{2017} x \equiv 1 (\bmod 25) \quad (**)$$

En este punto recordamos el teorema de Euler:

$$\text{Si mcd(a,m)=1 entonces } a^{\phi(m)} \equiv 1 (\bmod m).$$

Y lo aplicamos para m= 25, a = 18 y el cardinal de las unidades en el módulo 25 es $\phi(25) = 5^2 - 5 = 20$, resultando que $18^{20} \equiv 1 (\bmod 25)$

$$18^{2017} = 18^{20 \cdot 100 + 17} = (18^{20})^{100} (18)^{17} \equiv 18^{17} (\bmod 25)$$

Como $18 \equiv -7 (\bmod 25)$, la ecuación original ha quedado reducida a $(-7)^{17} x \equiv 1 (\bmod 25)$ de donde x es el inverso de $(-7)^{17}$ en el módulo 25.

$$(-7)^{17} x \equiv 1 (\bmod 25)$$

$$x \equiv (-7)^3 (\bmod 25)$$

$(-7)^3 = (-7)^2 (-7) = 49(-7) \equiv (-1)(-7) (\bmod 25) \equiv 7 (\bmod 25)$ entonces

$$x \equiv 7 (\bmod 25)$$

Esta es la única solución de (**).

Si queremos las soluciones de (*) (módulo 50) serán 7 y 32.

Ejercicio 5 (2 puntos)

(a) Enuncia y demuestra el Teorema Euler.
(b) Demuestra $(n^5 + 1) n (n^5 - 1)$ es divisible por 22 para todo n$\in$ **Z**.

Solución (b):

Teniendo en cuenta que $(n^5 + 1) n (n^5 - 1) = (n^{10} - 1) n$, tenemos que:

$$22 \diagup (n^{10} - 1) n \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \diagup (n^{10} - 1) n \\ y \\ 11 \diagup (n^{10} - 1) n \end{cases}$$

i) Por un lado es cierto que $\forall n \in Z_2 = \{0,1\}$ $(n^{10} - 1) n = 0$ por tanto $\forall n \in N$ $2 \diagup (n^{10} - 1) n$

ii) Por otro lado si n es múltiplo de 11 es evidente que $11 \diagup (n^{10} - 1) n$

y si $mcd(n, 11) = 1$, el teorema de Fermat $n^{\phi(11)} = n^{10} = 1$ Z_{11} de donde se deduce que $11 \diagup (n^{10} - 1)$

Por tanto $\forall n \in N$ $11 \diagup (n^{10} - 1) n$

Ejercicio 6 (1,5 puntos)

En $\mathbf{Z}^2$ se define la relación S definida por: (a,b) S (c,d) si $|a|+|b|=|c|+|d|$

Se pide

(a) Comprueba que es de equivalencia.

(b) Halla la clase de (0,0), la clase de (2,1) y la clase de (–1, 2). Dibújalas.

(c) Describe el conjunto cociente A/S en términos geométricos.

Solución:

(a) Se debe comprobar que la relación S cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva

Reflexiva: (a,b) S (a,b) para todo par (a,b)

Se cumple porque $|a|+|b|=|a|+|b|$

Simétrica: Si (a,b) S (c,d) entonces (c,d) S (a,b)

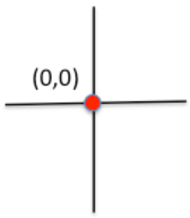
Si (a,b) S (c,d) entonces $|a|+|b|=|c|+|d|$, es decir, $|c|+|d|=|a|+|b|$ pero esto implica que (c,d) S (a,b)

Transitiva: Si (a,b) S (c,d) y (c,d) S (e,f) entonces (a,b) S (e,f)

La primera condición indica que $|a|+|b|=|c|+|d|$ y la segunda que $|c|+|d|=|e|+|f|$, luego $|a|+|b|=|e|+|f|$, es decir, (a,b) S (e,f)

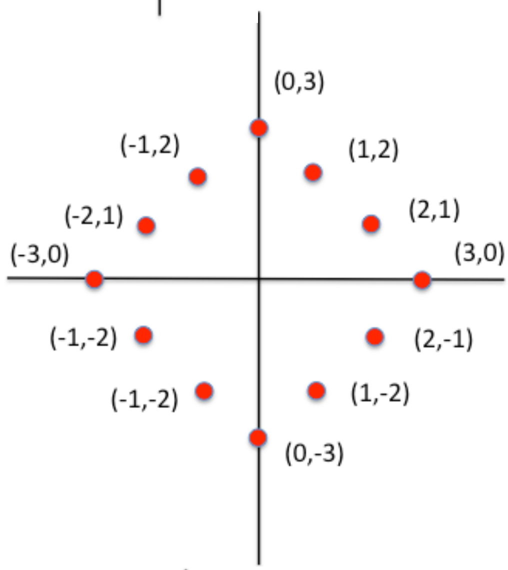
(b) Clase de (0,0)

$[(0,0)] = \{(x,y)\in \mathbf{Z}^2/\ (x,y)\ S\ (0,0)\} = \{(x,y)\in \mathbf{Z}^2 /\ |x|+|y|=0\} = \{(0,0)\}$



Clase de (2,1)

$[(2,1)] = \{(x,y)\in \mathbf{Z}^2 /\ (x,y)\ S\ (2,1)\} = \{(x,y)\in \mathbf{Z}^2 /\ |x|+|y|=3\} =$ {(0,3), (0,-3), (3,0), (-3,0), (1,2), (-1,-2), (-1,2), (1,-2), (2,1), (-2,-1), (-2,1), (2,-1)}



Clase de (-1,2)

$[(-1,2)] = \{(x,y)\in \mathbf{Z}^2 /\ (x,y)\ S\ (-1,2)\} = \{(x,y)\in \mathbf{Z}^2 /\ |x|+|y|=3\} =$ [(2,1)]

(c) Conjunto cociente. Descripción geométrica.

Clase de un punto $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$:

$[(a,b)] = \{(x,y)\in \mathbf{Z}^2 /\ (x,y)\ S\ (a,b)\} = \{(x,y)\in \mathbf{Z}^2 /\ |x|+|y|=|a|+|b|\}$

Si llamamos d a la suma de los valores absolutos de las coordenadas de (a,b), la clase de (a,b) está formada por los puntos de $\mathbf{Z}^2$ que están sobre el cuadrado $\mathbf{C_d}$ de vértices {(d,0),(0,d),(-d,0),(0,-d)}. Por tanto cada clase se corresponde con uno de estos cuadrados discretos de $\mathbf{Z}^2$. Además para cada $d \in N \cup \{0\}$ tenemos un cuadrado $\mathbf{C_d}$ que se corresponde con una clase, por tanto el conjunto cociente es la coleción de todos estos cuadrados:

$\mathbf{Z}^2/S = \{[(a,b)] /\ (a,b)\in \mathbf{Z}^2\} = \{\mathbf{C_d} /\ d \in N \cup \{0\}\}$